



Master 1. Conception et Calcul de Structures.

Méthode des Éléments Finis

Michel SUDRE

- ☐ 1° partie: Dynamique page 2
- ☐ 2° partie: Condensation page 21

1° partie: Dynamique.

Chap1: Etude modale: *sol 103*.

1 Rappels

1.1 Equations de Lagrange pour un système linéaire, libre, non amorti:

Considérons une structure libre et conservative à N degrés de liberté.

○ Le paramétrage, sous la forme d'un vecteur **position** $\{\mathbf{q}(t)\}$ à N composantes, doit définir complètement la configuration à tout instant t et doit vérifier $\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{0}\}$ dans la position d'équilibre **supposée stable** autour de laquelle s'effectue le mouvement.

Les N composantes $\mathbf{q}_i(t)$ pourront être dérivées 2 fois pour exprimer les vecteurs **vitesse** $\{\dot{\mathbf{q}}(t)\}$ et **accélération** $\{\ddot{\mathbf{q}}(t)\}$.

○ L'énergie élastique W et l'énergie cinétique E_C s'expriment respectivement en fonction des positions $\mathbf{q}_i(t)$ et des vitesses $\dot{\mathbf{q}}_i(t)$.

Le comportement étant supposé linéaire, les expressions prennent la forme suivante:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \{\mathbf{q}(t)\}^t \times [\mathbf{K}] \times \{\mathbf{q}(t)\} \\ E_C &= \frac{1}{2} \{\dot{\mathbf{q}}(t)\}^t \times [\mathbf{M}] \times \{\dot{\mathbf{q}}(t)\} \end{aligned}$$

$[\mathbf{K}]$ est la **matrice de rigidité** et $[\mathbf{M}]$ est la **matrice de masse**.

○ La formulation de Lagrange permet d'obtenir N équations qui constituent le système différentiel du mouvement. L'intégration de ce système conduit à l'expression des N fonctions positions $\mathbf{q}_i(t)$.

○ L'équation de Lagrange relative au paramètre $\mathbf{q}_i(t)$ s'écrit:

$$\mathcal{L}_{\mathbf{q}_i}: \frac{d}{dt} \left(\frac{dE_C}{d\dot{\mathbf{q}}_i} \right) = - \frac{dW}{d\mathbf{q}_i}$$

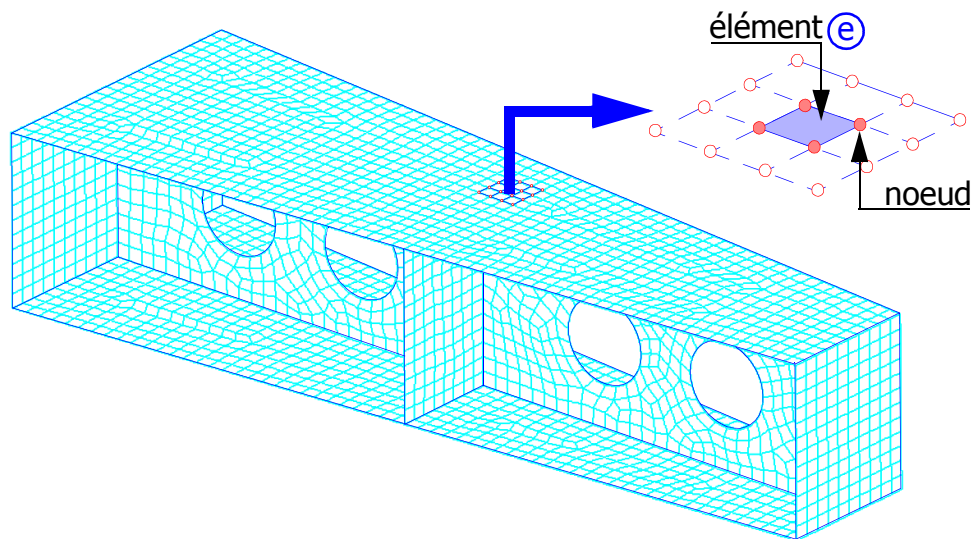
Du fait du comportement linéaire, le système différentiel prend la forme:

$$[\mathbf{M}] \times \{\ddot{\mathbf{q}}(t)\} + [\mathbf{K}] \times \{\mathbf{q}(t)\} = \{\mathbf{0}\}$$

○ Les modes propres sont caractérisés par les **valeurs propres** et **vecteurs propres** de la matrice $[\mathbf{M}]^{-1}[\mathbf{K}]$.

1.2 Discretisation par la MEF:

○ La **Méthode des Éléments Finis** consiste à découper la structure en éléments de forme simple et à choisir une approximation du déplacement sur chaque subdivision. C'est une méthode de Ritz 'par morceaux' qui s'adapte aux géométries les plus complexes.



Les subdivisions sont les '**éléments**' et les connexions entre éléments sont les '**noeuds**'.

Les paramètres de configuration sont les composantes de déplacement des noeuds (**déplacements nodaux**).

Les N **déplacements nodaux** sont rangés dans le vecteur $\{\mathbf{q}(t)\}$.

○ Pour chaque élément **e**, on calcule l'énergie élastique W^e et l'énergie cinétique E_c^e en fonction des déplacements et des vitesses des noeuds de l'élément **e**.

On obtient ensuite l'énergie élastique W et l'énergie cinétique E_c de la structure par addition (**assemblage**) des contributions des différents éléments.

La matrice $[K]$ de **rigidité** et la matrice $[M]$ de **masse** sont ainsi obtenues par **assemblage** des contributions des différents éléments.

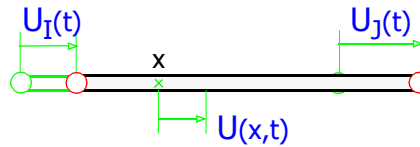
D'où le système:

$$[M] \times \{\ddot{\mathbf{q}}(t)\} + [K] \times \{\mathbf{q}(t)\} = \{\mathbf{0}\}$$

2 Élément 'Rod' (traction-compression)

2.1 Présentation:

○ L'élément 'Rod' est un élément de longueur ℓ à 2 noeuds I et J.
Il met en jeu, dans son repère local, 2 ddls $U_I(t)$ et $U_J(t)$.



Le déplacement $U(x,t)$ d'une section courante d'abscisse x est posé sous la forme linéaire, cinématiquement admissible:

$$U(x,t) = \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) U_I(t) + \frac{x}{\ell} U_J(t)$$

2.2 Energie Elastique:

On désigne par E le module élastique et S l'aire de la section droite.

Les 2 déplacements $U_I(t)$ et $U_J(t)$ sont rangés dans le vecteur $\{\mathbf{q}^e(t)\}$

○ L'énergie élastique W^e a été exprimée dans le cours de statique:

$$W^e = \frac{1}{2} \{\mathbf{q}^e(t)\}^t \times \left[\frac{ES}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right] \times \{\mathbf{q}^e(t)\}$$

2.3 Energie Cinétique avec l'option "masse répartie":

On désigne par m la masse supposée répartie de l'élément de longueur ℓ .

L'énergie cinétique E_c^e se calcule par addition de l'énergie cinétique de chaque tranche d'épaisseur dx :

$$E_c^e = \frac{1}{2} \int_0^\ell \left(\frac{\delta U(x,t)}{\delta t} \right)^2 dm = \frac{1}{2} \frac{m}{\ell} \int_0^\ell \left(\frac{\delta U(x,t)}{\delta t} \right)^2 dx$$

En remplaçant $\frac{\delta U(x,t)}{\delta t}$ par son expression en fonction de $\dot{U}_I(t)$ et $\dot{U}_J(t)$:

$$\frac{\delta U(x,t)}{\delta t} = \left\{ \dot{U}_I(t), \dot{U}_J(t) \right\} \begin{Bmatrix} \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \\ \frac{x}{\ell} \end{Bmatrix} = \left\{ \left(1 - \frac{x}{\ell}\right), \frac{x}{\ell} \right\} \begin{Bmatrix} \dot{U}_I(t) \\ \dot{U}_J(t) \end{Bmatrix}$$

On obtient pour l'énergie cinétique:

$$E_C^e = \frac{1}{2} \left\{ \dot{U}_I(t), \dot{U}_J(t) \right\} \frac{m}{\ell} \begin{bmatrix} \int_0^L \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)^2 dx & \int_0^L \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \cdot \frac{x}{\ell} dx \\ \int_0^L \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \cdot \frac{x}{\ell} dx & \int_0^L \left(\frac{x}{\ell}\right)^2 dx \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U}_I(t) \\ \dot{U}_J(t) \end{Bmatrix}$$

○ Après intégration, la matrice de masse de l'élément prend la forme suivante::

$$[M]^e = m \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

2.4 Energie Cinétique avec l'option "masse concentrée":

○ On considère que la masse m est concentrée par moitié sur chacun des 2 noeuds. L'énergie cinétique E_C^e se calcule alors simplement:

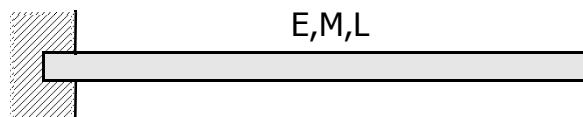
$$E_C^e = \frac{1}{2} \frac{m}{2} \dot{U}_I(t)^2 + \frac{1}{2} \frac{m}{2} \dot{U}_J(t)^2$$

Et la matrice de masse de l'élément prend la forme diagonale suivante:

$$[M]^e = m \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

2.5 Exemple d'application:

Considérons une poutre encastree-libre en vibrations longitudinales:

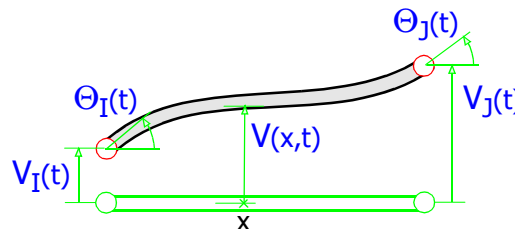


- 1- Exprimer la première pulsation propre en modélisant la poutre par 1 seul élément 'Rod' avec un modèle de masse 'coupled'.
- 2- Exprimer cette pulsation en modélisant la poutre par 2 éléments 'Rod' de longueur $\ell = L/2$ et masse $m = M/2$ avec un modèle de masse 'coupled'.
- 3- Etudier comment évolue cette pulsation en fonction du nombre d'éléments 'Rod' utilisés.

3 Elément 'Beam' (flexion dans le plan)

3.1 Energie Elastique:

○ L'élément de flexion dans le plan est un élément de longueur ℓ à 2 noeuds I et J. Il met en jeu, dans son repère local, 4 ddls $V_I(t)$, $\Theta_I(t)$, $V_J(t)$ et $\Theta_J(t)$.



Le déplacement $V(x,t)$ d'une section courante d'abscisse x est posé sous la forme cubique:

$$V(x,t) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3$$

Cette forme est rendue cinématiquement admissible en calculant les coefficients (a_0 , a_1 , a_2 , a_3) de telle sorte que $\forall t$:

$$V(0,t) = V_I(t) \quad \frac{\delta V(0,t)}{\delta x} = \Theta_I(t) \quad V(\ell,t) = V_J(t) \quad \frac{\delta V(\ell,t)}{\delta x} = \Theta_J(t)$$

3.2 Energie Elastique:

On désigne par E le module élastique et I_z le moment quadratique de la section droite.

Les 4 déplacements $V_I(t)$, $\Theta_I(t)$, $V_J(t)$ et $\Theta_J(t)$ sont rangés dans le vecteur $\{\mathbf{q}^e(t)\}$

○ L'énergie élastique W^e a été exprimée dans le cours de statique:

$$W^e = \frac{1}{2} \{\mathbf{q}^e(t)\}^t \times \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6\ell & -12 & 6\ell \\ 6\ell & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 \\ -12 & -6\ell & 12 & -6\ell \\ 6\ell & 2\ell^2 & -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix} \times \{\mathbf{q}^e(t)\}$$

3.3 Energie Cinétique avec l'option "masse répartie":

On désigne par m la masse supposée répartie de l'élément de longueur ℓ .

L'énergie cinétique E_c^e se calcule par addition de l'énergie cinétique de chaque tranche

d'épaisseur dx :

$$E_C^e = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \left(\frac{\delta V(x,t)}{\delta t} \right)^2 dm = \frac{1}{2} \frac{m}{L} \int_0^{\ell} \left(\frac{\delta V(x,t)}{\delta t} \right)^2 dx$$

○ En remplaçant $\frac{\delta V(x,t)}{\delta t}$ par son expression en fonction de $\dot{V}_I(t)$, $\dot{\Theta}_I(t)$, $\dot{V}_J(t)$ et $\dot{\Theta}_J(t)$ rangés dans le vecteur $\{\dot{\mathbf{q}}^e(t)\}$, on obtient après intégration:

$$E_C^e = \frac{1}{2} \{\dot{\mathbf{q}}^e(t)\}^t [M]^e \{\dot{\mathbf{q}}^e(t)\} \quad \text{avec} \quad [M]^e = \frac{m}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22\ell & 54 & -13\ell \\ 22\ell & 4\ell^2 & 13\ell & -3\ell^2 \\ 54 & 13\ell & 156 & -22\ell \\ -13\ell & -3\ell^2 & -22\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix}$$

3.4 Energie Cinétique avec l'option "masse concentrée":

○ On considère que la masse m est concentrée par moitié sur chacun des 2 noeuds. L'énergie cinétique E_C^e se calcule alors simplement:

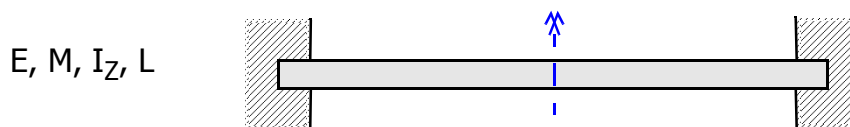
$$E_C^e = \frac{1}{2} \frac{m}{2} \dot{V}_I(t)^2 + \frac{1}{2} \frac{m}{2} \dot{V}_J(t)^2$$

Et la matrice de masse de l'élément prend la forme diagonale suivante::

$$[M]^e = m \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.5 Exemple d'application:

Considérons une poutre bi-encastée en vibrations transversales:



-1- Montrer qu'on peut utiliser un domaine d'étude de longueur $L/2$ égal au demi domaine physique. Exprimer la première pulsation propre dans un mode symétrique avec 1 seul élément 'Beam' de longueur $\ell = L/2$ et un modèle de masse répartie.

-2- Même question pour le premier mode antisymétrique.

-3- Exprimer les matrices $[K]$ et $[M]$ avec un modèle de masse répartie à 2 éléments de longueur $\ell = L/4$

-4- Quel est le problème posé par l'utilisation du modèle de masse concentrée?

4 Condensation de Guyan

4.1 Principe

○ Le principe de base de la condensation de Guyan consiste à obtenir un problème aux valeurs propres de taille réduite altérant le moins possible le calcul des pulsations propres les plus basses.

Pour cela, on effectue une partition des DDL de la structure en deux sous-ensembles:

- le sous-ensemble des N_p DDL **principaux** qui vont servir à caractériser seuls le comportement dynamique de la structure
- le sous-ensemble complémentaire des $N_s (=N-N_p)$ DDL **secondaires**.

Ces DDL **secondaires** sont les degrés de liberté qui ne participent pas (ou qui participent peu) au calcul de l'énergie cinétique E_C .

Ce choix peut être dicté par les considérations suivantes :

- éliminer en priorité tous les DDL pour lesquels les termes correspondants de la matrice des masse sont nuls ou négligeables,
- pour l'étude des modes de respiration des coques, éliminer les DDL de membrane ce qui correspond au fait que l'énergie cinétique de translation dans le plan tangent est dans ce cas petite par rapport à l'énergie cinétique de déplacement transverse,
- éliminer les DDL de rotation, par exemple Θ_x, Θ_y dans les problèmes de plaques minces en flexion ce qui correspond au fait que l'énergie cinétique de rotation est petite par rapport à celle de translation,
- dans le cas de modes bien découplés suivant certaines directions, ne retenir que les déplacements dans une des directions données pour l'étude des modes correspondants.

Il convient de s'assurer dans tous les cas que les DDL **principaux** seuls doivent permettre une définition satisfaisante des modes recherchés.

○ En jouant sur la numérotation, nous pouvons donc effectuer la partition suivante du vecteur déplacement et des matrices de rigidité et de masse:

$$\{\mathbf{q}\} = \begin{Bmatrix} \{\mathbf{q}\}_p \\ \{\mathbf{q}\}_s \end{Bmatrix} \quad [\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{K}]_{pp} & [\mathbf{K}]_{ps} \\ - & - \\ [\mathbf{K}]_{sp} & [\mathbf{K}]_{ss} \end{bmatrix} \quad [\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{M}]_{pp} & [\mathbf{M}]_{ps} \\ - & - \\ [\mathbf{M}]_{sp} & [\mathbf{M}]_{ss} \end{bmatrix}$$

Les DDL **secondaires** ne participant pas (ou peu) au calcul de l'énergie cinétique, il est

possible de simplifier la matrice $[M]$:

$$[M] = \begin{bmatrix} [M]_{pp} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Et le système différentiel du mouvement:

$$[M] \times \{\ddot{\mathbf{q}}(t)\} + [K] \times \{\mathbf{q}(t)\} = \{\mathbf{0}\}$$

peut-être partitionné en 2 sous-systèmes [a] et [b].

$$\begin{aligned} \boxed{[M]_{pp}} \{\ddot{\mathbf{q}}\}_p + \boxed{[K]_{pp}} \{\mathbf{q}\}_p + \boxed{[K]_{ps}} \{\mathbf{q}\}_s &= \{\mathbf{0}\} \quad [a] \\ \boxed{[K]_{sp}} \{\mathbf{q}\}_p + \boxed{[K]_{ss}} \{\mathbf{q}\}_s &= \{\mathbf{0}\} \quad [b] \end{aligned}$$

Le sous-système [b] permet d'exprimer les DDL **secondaires** en fonctions des DDL **principaux**:

$$\{\mathbf{q}\}_s = - \boxed{[K]_{ss}}^{-1} \boxed{[K]_{sp}} \{\mathbf{q}\}_p$$

On peut ainsi procéder à une élimination des DDL **secondaires** en injectant cette expression dans le sous-système [a]:

$$\boxed{[M]_{pp}} \{\ddot{\mathbf{q}}\}_p + \boxed{[K]_{pp}} \{\mathbf{q}\}_p - \boxed{[K]_{ps}} \boxed{[K]_{ss}}^{-1} \boxed{[K]_{sp}} \{\mathbf{q}\}_p = \{\mathbf{0}\}$$

d'où le nouveau système différentiel réduit aux DDL **principaux**:

$$\boxed{[M]_{pp}} \{\ddot{\mathbf{q}}\}_p + \boxed{[K]_{pp}^*} \{\mathbf{q}\}_p = \{\mathbf{0}\}$$

$$\text{avec: } \boxed{[K]_{pp}^*} = \boxed{[K]_{pp}} - \boxed{[K]_{ps}} \boxed{[K]_{ss}}^{-1} \boxed{[K]_{sp}}$$

○ Les modes propres sont caractérisés à partir des **valeurs propres** et **vecteurs propres** de la matrice $\boxed{[M]_{pp}}^{-1} \boxed{[K]_{pp}^*}$.

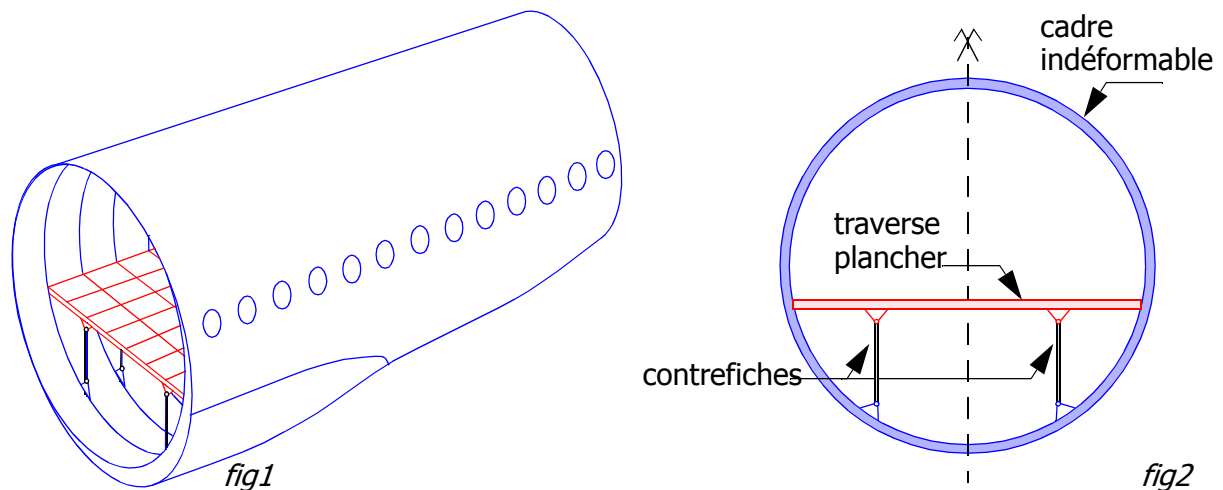
On note que l'expression de $\boxed{[K]_{pp}^*}$ est analogue à celle de la matrice de rigidité con-

densée d'une sous-structure en analyse statique.

4.2 Exemple d'application:

Etude Modale d'un Plancher d'avion.

L'étude porte sur une structure de plancher d'avion *fig1*.



On se propose d'étudier de manière simplifiée le comportement dynamique d'une tranche de fuselage *fig2* composée :

- d'un cadre supposé indéformable,
- d'une traverse plancher,
- de 2 contrefiches.

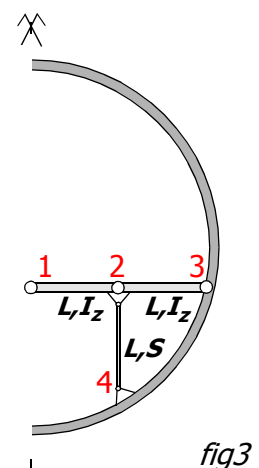
On modélise le demi-plancher par 2 éléments poutres de moment I_z et la contrefiche par un élément barre de section S voir *fig3*.

Le noeud 3 est encastré dans le cadre indéformable.

On utilisera la méthode des masses concentrées.

Le matériau a pour module E . La masse d'une poutre plancher de longueur L est M . La masse de la contrefiche de même longueur L est $m \ll M$.

Rechercher les pulsations propres des modes symétriques. On utilisera une **condensation de Guyan** en considérant les DDLs de rotation comme secondaires.



Chap2: Réponse fréquentielle: *sol 108 et 111.*

1 Rappels

1.1 orthogonalité des modes :

○ Reprenons l'équation du mouvement:

$$[M] \times \{\ddot{\mathbf{q}}(t)\} + [K] \times \{\mathbf{q}(t)\} = \{\mathbf{0}\}$$

On en déduit pour le mode (i) de forme $\{\Phi_i\}$ et de pulsation ω_i :

$$[-\omega_i^2.[M] + [K]] \times \{\Phi_i\} = \{0\}$$

Ce qui peut s'écrire:

$$[K] \times \{\Phi_i\} = \omega_i^2.[M] \times \{\Phi_i\} \quad [a]$$

De même pour le mode (j) différent de (i):

$$[K] \times \{\Phi_j\} = \omega_j^2.[M] \times \{\Phi_j\} \quad [b]$$

Prémultiplions la relation [a] par $\{\Phi_j\}^t$ et la relation [b] par $\{\Phi_i\}^t$:

$$\{\Phi_j\}^t \times [K] \times \{\Phi_i\} = \omega_i^2. \{\Phi_j\}^t \times [M] \times \{\Phi_i\}$$

$$\{\Phi_i\}^t \times [K] \times \{\Phi_j\} = \omega_j^2. \{\Phi_i\}^t \times [M] \times \{\Phi_j\}$$

Par différence, si [M] et [K] sont symétriques, il vient:

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2). \{\Phi_j\}^t \times [M] \times \{\Phi_i\} = 0$$

D'où:

$$\{\Phi_j\}^t \times [M] \times \{\Phi_i\} = 0 \quad \forall \quad i \text{ et } j (i \neq j)$$

On parle d'orthogonalité des vecteurs propres $\{\Phi_i\}$ relativement à [M].

Remarquons que cela conduit aussi à:

$$\{\Phi_j\}^t \times [K] \times \{\Phi_i\} = 0 \quad \forall \quad i \text{ et } j (i \neq j)$$

(orthogonalité des vecteurs propres $\{\Phi_i\}$ relativement à [K]).

1.2 quotient de Rayleigh:

Reprenons la relation:

$$[K] \times \{\Phi_i\} = \omega_i^2.[M] \times \{\Phi_i\}$$

En prémultipliant par $\{\phi_i\}^t$ il vient :

$$\{\phi_i\}^t \times [K] \times \{\phi_i\} = \omega_i^2 \cdot \{\phi_i\}^t \times [M] \times \{\phi_i\}$$

D'où l'expression de la pulsation au carré:

$$\omega_i^2 = \frac{\{\phi_i\}^t \times [K] \times \{\phi_i\}}{\{\phi_i\}^t \times [M] \times \{\phi_i\}}$$

Ce quotient s'appelle *quotient de Rayleigh*.

Notons que le vecteur $\{\phi_i\}$ est déterminé à une constante près, sans conséquence pour le calcul de ω_i^2 .

2 Réponse forcée harmonique :

○ Considérons l'équation du mouvement forcé:

$$[M] \times \{\ddot{\mathbf{q}}(t)\} + [K] \times \{\mathbf{q}(t)\} = \{\mathbf{F}\} \cdot \cos(\Omega t)$$

Essayons une solution de type:

$$\{\mathbf{q}(t)\} = \{\mathbf{U}\} \cdot \cos(\Omega t)$$

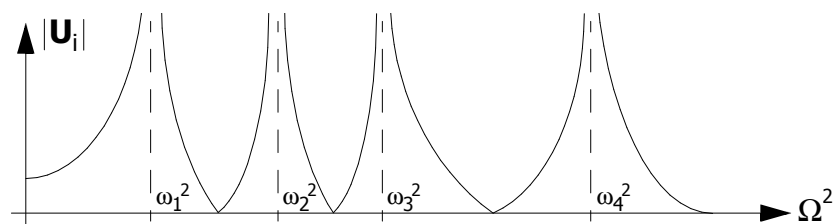
Il vient:

$$[-\Omega^2 \cdot [M] + [K]] \times \{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{F}\} \quad (1)$$

2.1 Méthode directe :

○ La méthode directe "*Direct Frequency Response Analysis*" ([sol 108](#)) consiste à rechercher $\{\mathbf{U}\}$ en fonction de Ω par résolution du système (1).

Il y a résonance si $\Omega^2 = \omega_i^2 \quad \forall \quad i = 1 \dots N$



2.2 Méthode modale :

○ La méthode modale "*Modal Frequency Response Analysis*" (sol 111) consiste à décomposer $\{\mathbf{U}\}$ dans la base constituée par les vecteurs propres $\{\Phi_i\}$:

$$\{\mathbf{U}\} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \cdot \{\Phi_i\}$$

En remplaçant dans (1), il vient:

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i \cdot ([-\Omega^2 \cdot [\mathbf{M}] + [\mathbf{K}]] \times \{\Phi_i\}) = \{\mathbf{F}\}$$

D'où:
$$\sum_{i=1}^N \alpha_i \cdot (-\Omega^2 \cdot [\mathbf{M}] \times \{\Phi_i\} + [\mathbf{K}] \times \{\Phi_i\}) = \{\mathbf{F}\}$$

Prémultiplications par $\{\Phi_i\}^t$. Du fait de l'orthogonalité des vecteurs propres relativement à $[\mathbf{M}]$ et à $[\mathbf{K}]$, il vient:

$$\alpha_i \cdot (-\Omega^2 \cdot \{\Phi_i\}^t [\mathbf{M}] \times \{\Phi_i\} + \{\Phi_i\}^t [\mathbf{K}] \times \{\Phi_i\}) = \{\Phi_i\}^t \times \{\mathbf{F}\}$$

D'où:
$$\alpha_i = \frac{\{\Phi_i\}^t \times \{\mathbf{F}\}}{-\Omega^2 \cdot \{\Phi_i\}^t [\mathbf{M}] \times \{\Phi_i\} + \{\Phi_i\}^t [\mathbf{K}] \times \{\Phi_i\}}$$

Or il a été montré que: $\{\Phi_i\}^t [\mathbf{K}] \times \{\Phi_i\} = \omega_i^2 \cdot \{\Phi_i\}^t [\mathbf{M}] \times \{\Phi_i\}$,

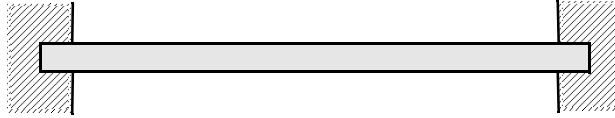
donc:
$$\alpha_i = \frac{1}{\omega_i^2 - \Omega^2} \cdot \frac{\{\Phi_i\}^t \times \{\mathbf{F}\}}{\{\Phi_i\}^t [\mathbf{M}] \times \{\Phi_i\}}$$

Le coefficient α_i devient très grand quand Ω^2 s'approche de ω_i^2 .

2.3 Exemples d'application:

○ Exemple1:

Considérons une poutre bi-encastée en vibrations longitudinales:



Elle est modélisée par 3 éléments 'Rod':



- 1- Caractériser les 2 premiers modes.
- 2- Un effort $F \cdot \cos(\Omega t)$ est appliqué au noeud 3. Mettre en équation.
- 3- Caractériser la réponse fréquentielle par la méthode directe.
- 4- Caractériser la réponse fréquentielle par la méthode modale.

Application Numérique:

$$E = 200 \text{ GPa}$$

$$S = 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$m = 8 \cdot 10^{-2} \text{ Kg}$$

$$L = 0.1 \text{ m}$$

Annexe: Résolution de l'exercice précédent avec NASTRAN:**sol 103:**

```

$ Normal Modes Analysis
SOL 103
CEND
$
$ Subcase name : Two DOF System
  SUBTITLE= Two DOF System
  METHOD = 1
  VECTOR = ALL
BEGIN BULK
EIGRL,1,,,10
$
GRID,1,,0.,0.,0.,,123456
GRID,2,,0.1,0.,0.,,23456
GRID,3,,0.2,0.,0.,,23456
GRID,4,,0.3,0.,0.,,123456
$
CONM2,1,2,,.08
CONM2,2,3,,.08
$
CELAS2,11,2.0E8,1,1,2,1
CELAS2,12,2.0E8,2,1,3,1
CELAS2,13,2.0E8,3,1,4,1
$
ENDDATA

```

$$m = \{\Phi_i\}^t [M] \{\Phi_i\} : \text{generalized mass}$$

$$k = \{\Phi_i\}^t [K] \{\Phi_i\} : \text{generalized stiffness}$$

$$\omega_i^2 = \frac{k}{m}$$

extrait du fichier f06:

R E A L E I G E N V A L U E S

MODE NO.	EXTRACTION ORDER	EIGENVALUE	RADIANS	CYCLES	GENERALIZED MASS	GENERALIZED STIFFNESS
1	1	2.500000E+09	5.000000E+04	7.957747E+03	1.000000E+00	2.500000E+09
	2	7.500000E+09	8.660254E+04	1.378322E+04	1.000000E+00	7.500000E+09
		EIGENVALUE = 2.500000E+09				
		CYCLES = 7.957747E+03				
R E A L E I G E N V E C T O R N O .						
		1				
POINT ID.	TYPE	T1	T2	T3	R1	R2
1	G	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	G	2.500000E+00	0.0	0.0	0.0	0.0
3	G	2.500000E+00	0.0	0.0	0.0	0.0
4	G	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
		MARCH 2019				
TWO DOF SYSTEM						
0		EIGENVALUE = 7.500000E+09				
		CYCLES = 1.378322E+04				
R E A L E I G E N V E C T O R N O .						
		2				
POINT ID.	TYPE	T1	T2	T3	R1	R2
1	G	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	G	-2.500000E+00	0.0	0.0	0.0	0.0
3	G	2.500000E+00	0.0	0.0	0.0	0.0
4	G	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

sol 108:

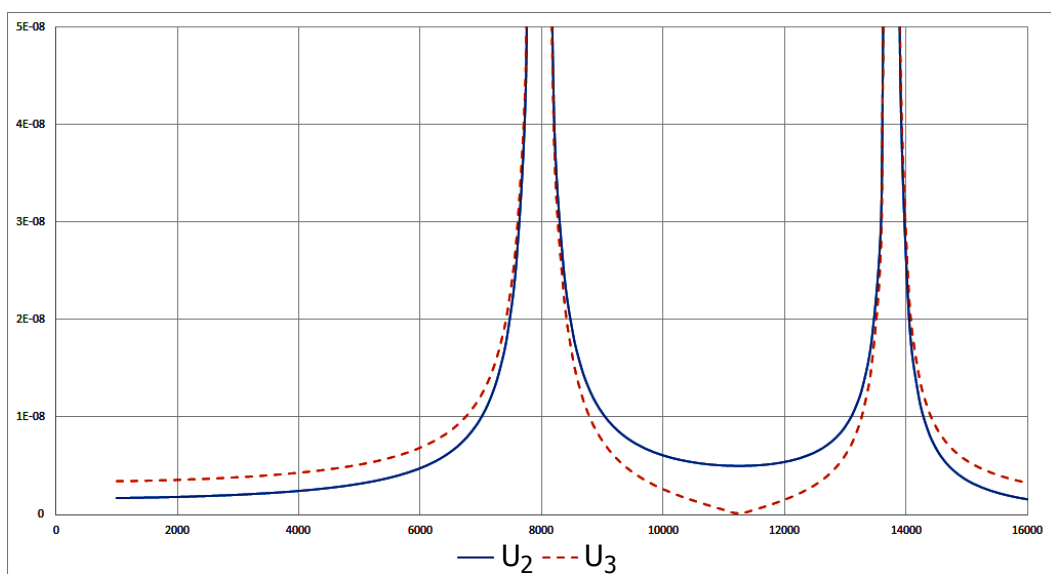
```

$ Direct Frequency Response Analysis
SOL 108
CEND
$
$ Subcase name : Two DOF System
  SUBTITLE= Two DOF System
  DLOAD = 50
  FREQUENCY = 30
  DISPL = ALL
BEGIN BULK
EIGRL,1,,10
$
GRID,1,,0.,0.,0.,,123456
GRID,2,,0.1,0.,0.,,23456
GRID,3,,0.2,0.,0.,,23456
GRID,4,,0.3,0.,0.,,123456
$
CONM2,1,2,,.08
CONM2,2,3,,.08
$
CELAS2,11,2.0E8,1,1,2,1
CELAS2,12,2.0E8,2,1,3,1
CELAS2,13,2.0E8,3,1,4,1
$
RLOAD2,50,60,,70
$
DAREA,60,3,1,1.
$
TABLED1,70,
,0.,1.,1.6+4,1.,ENDT
$
FREQ1,30,1000.,150.,100
ENDDATA

```

effort unitaire suivant x sur le noeud 3.

la fréquence varie de 1000 Hz à 16 000 Hz par pas de 150 Hz.



extrait du fichier f06:

FREQUENCY = 1.000000E+03

COMPLEX DISPLACEMENT VECTOR
(REAL/IMAGINARY)

	POINT ID.	TYPE	T1	T2	T3	R1	R2	R3
0	1	G	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
			0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0	2	G	1.702369E-09	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
			0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0	3	G	3.377855E-09	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
			0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0	4	G	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
			0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

TWO DOF SYSTEM

0

FREQUENCY = 1.150000E+03

COMPLEX DISPLACEMENT VECTOR
(REAL/IMAGINARY)

	POINT ID.	TYPE	T1	T2	T3	R1	R2	R3
0	1	G	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
			0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0	2	G	1.714149E-09	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
			0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0	3	G	3.392499E-09	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
			0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0	4	G	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
			0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

TWO DOF SYSTEM

0

FREQUENCY = 1.300000E+03

COMPLEX DISPLACEMENT VECTOR
(REAL/IMAGINARY)

	POINT ID.	TYPE	T1	T2	T3	R1	R2	R3
0	1	G	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
			0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0	2	G	1.727735E-09	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
			0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0	3	G	3.409361E-09	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
			0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0	4	G	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
			0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

.
. .
. .
. .
. .
. .

TWO DOF SYSTEM

FREQUENCY = 1.585000E+04

COMPLEX DISPLACEMENT VECTOR
(REAL/IMAGINARY)

	POINT ID.	TYPE	T1	T2	T3	R1	R2	R3
0	1	G	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
			0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0	2	G	1.742364E-09	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
			0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0	3	G	-3.427485E-09	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
			0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0	4	G	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
			0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

TWO DOF SYSTEM

0

FREQUENCY = 1.600000E+04

COMPLEX DISPLACEMENT VECTOR
(REAL/IMAGINARY)

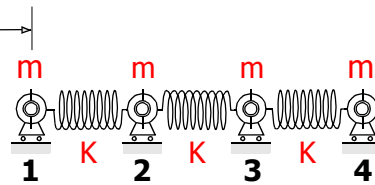
	POINT ID.	TYPE	T1	T2	T3	R1	R2	R3
0	1	G	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
			0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0	2	G	1.576206E-09	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
			0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0	3	G	-3.219543E-09	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
			0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0	4	G	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
			0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

sol 111:

```
$ Modal Frequency Response Analysis
SOL 111
CEND
$
$ Subcase name : Two DOF System
  SUBTITLE= Two DOF System
  DLOAD = 50
  FREQUENCY = 30
  METHOD=10
  DISPL = ALL
BEGIN BULK
EIGRL,1,,10
$
GRID,1,,0.,0.,0.,,123456
GRID,2,,0.1,0.,0.,,23456
GRID,3,,0.2,0.,0.,,23456
GRID,4,,0.3,0.,0.,,123456
$
CONM2,1,2,,.08
CONM2,2,3,,.08
$
CELAS2,11,2.0E8,1,1,2,1
CELAS2,12,2.0E8,2,1,3,1
CELAS2,13,2.0E8,3,1,4,1
$
RLOAD2,50,60,,70
$
DAREA,60,3,1,1.
$
TABLED1,70,
,0.,1.,1.6+4,1.,ENDT
$
FREQ1,30,1000.,150.,100
EIGRL,10,-10.,1.6+4
ENDDATA
```

○ Exemple2 (excitation par un mouvement du bâti):

$$u_1 = a \cdot \cos(\Omega t)$$



$$a = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$K = 200 \cdot 10^6 \text{ N/m}$$

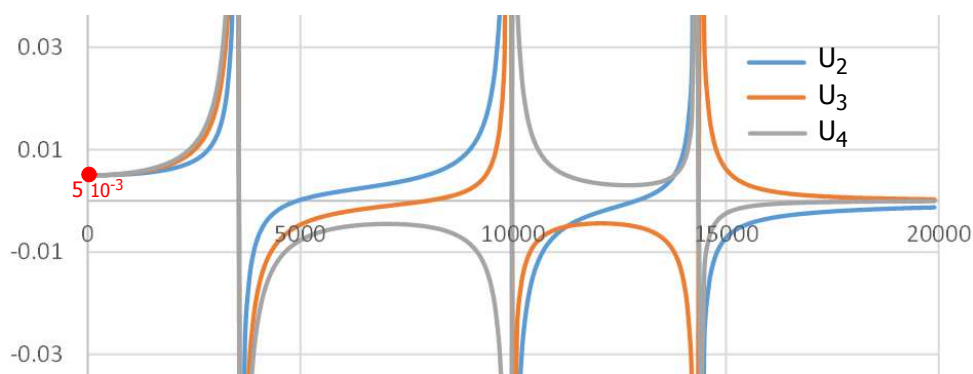
$$m = 8 \cdot 10^{-2} \text{ Kg}$$

```

$ enforced displacement
SOL 108
CEND
$
SUBTITLE= enforced displacement
  DLOAD = 30
  FREQUENCY = 40
  SPC = 2
  DISPL = ALL
BEGIN BULK
$
GRID,1,,0.,0.,0.
GRID,2,,0.1,0.,0.
GRID,3,,0.2,0.,0.
GRID,4,,0.3,0.,0.
$
CONM2,1,1,,.08
CONM2,2,2,,.08
CONM2,3,3,,.08
CONM2,4,4,,.08
$
CELAS2,11,2.0E8,1,1,2,1
CELAS2,12,2.0E8,2,1,3,1
CELAS2,13,2.0E8,3,1,4,1
$
RLOAD2,30,50,,,60,,DISP
FREQ1,40,0.,100.,200
$
SPCADD,2,1,3
SPC1,1,23456,2,3,4
SPC1,3,123456,1
SPCD,50,1,1,5,-3
$
TABLED2,60,0.
,0.,1.,2.+4,1.,ENDT
$
ENDDATA

```

déplacement imposé de $5 \cdot 10^{-3}$ suivant x sur le noeud 1.



2° partie: Condensation.

1 Condensation

○ La condensation s'appuie sur la partition des DDLs entre DDLs principaux et DDLs secondaires. Cette distinction est arbitraire.

Convenons par exemple de numérotiser d'abord les DDLs principaux puis les DDLs secondaires. On obtient ainsi:

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} U_p \\ U_s \end{Bmatrix}$$

et le système: $[K] \cdot \{U\} = \{F\}$ devient: $\begin{bmatrix} K_{pp} & K_{ps} \\ K_{sp} & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_p \\ U_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_p \\ f_s \end{Bmatrix}$

○ Nous allons voir comment il est possible de 'condenser' les DDLs secondaires pour ne conserver que le système réduit aux seuls DDLs principaux.

qui peut s'écrire: $[K_{pp}] \cdot \{U_p\} + [K_{ps}] \cdot \{U_s\} = \{f_p\}$ sous système [1]
 $[K_{sp}] \cdot \{U_p\} + [K_{ss}] \cdot \{U_s\} = \{f_s\}$ sous système [2]

Le sous-système [2], en prémultipliant par $[K_{ss}]^{-1}$ conduit à:

$$\{U_s\} = [K_{ss}]^{-1} \cdot [\{f_s\} - [K_{sp}] \cdot \{U_p\}] \quad [A]$$

En reportant cette expression de $\{U_s\}$ dans le sous-système [1], on obtient:

$$[K_{pp}] \cdot \{U_p\} + [K_{ps}] \cdot [K_{ss}]^{-1} \cdot [\{f_s\} - [K_{sp}] \cdot \{U_p\}] = \{f_p\}$$

D'où:

$$([K_{pp}] - [K_{ps}] \cdot [K_{ss}]^{-1} \cdot [K_{sp}]) \cdot \{U_p\} = \{f_p\} - [K_{ps}] \cdot [K_{ss}]^{-1} \cdot \{f_s\}$$

En posant $[K]^* = ([K_{pp}] - [K_{ps}] \cdot [K_{ss}]^{-1} \cdot [K_{sp}])$ et $\{f\}^* = \{f_p\} - [K_{ps}] \cdot [K_{ss}]^{-1} \cdot \{f_s\}$

on obtient le système réduit aux seuls DDLs principaux : $[K]^* \cdot \{U_p\} = \{f\}^*$

○ Dans une première étape:

step 1 on résoud $[K]^* \cdot \{U_p\} = \{f\}^*$ pour obtenir $\{U_p\}$

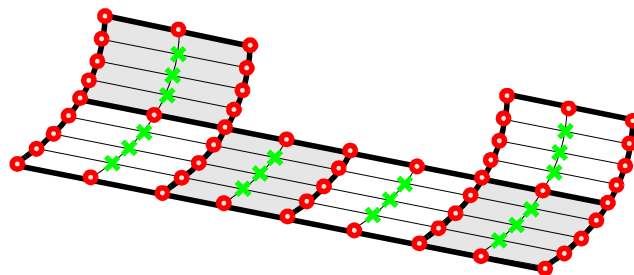
○ puis:

step 2 on calcule les DDLs secondaires à partir de la relation [A]:

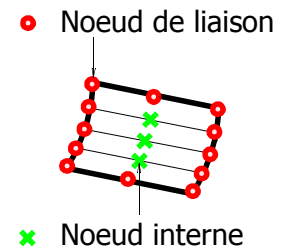
$$\{U_s\} = [K_{ss}]^{-1} \cdot [\{f_s\} - [K_{sp}] \cdot \{U_p\}]$$

2 Super Element

○ La méthode des sous-structures consiste à subdiviser une structure en parties appelées **super-éléments**.



structure subdivisée en 6 **super-éléments**



super-élément

Comme on le voit sur la figure, on distingue:

- les DDLs internes à chaque **super-élément**
- les DDLs de liaison entre les différents **super-éléments**

La méthode va s'organiser en 3 étapes:

○ **step 1** On considère chaque super-élément et on réalise une condensation en prenant:

- les DDLs internes au super-élément comme DDLs secondaires,
- les DDLs de liaison du super-élément comme DDLs principaux.

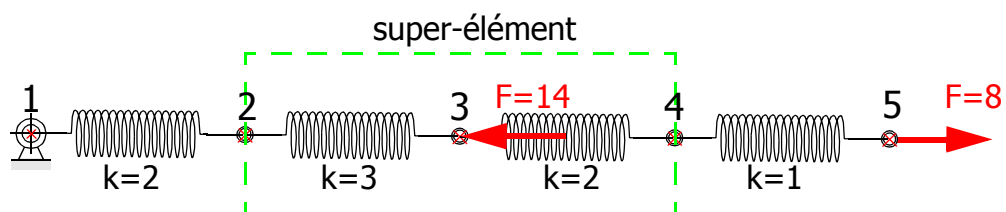
On en déduit les matrices $[K]^*$ et les vecteurs $\{f\}^*$ de chaque super-élément.

○ **step 2** On assemble les super-éléments et on résout le système global portant sur l'ensemble des DDLs de liaison.

○ **step 3** Une fois les DDLs de liaison calculés, on revient successivement à chacun des super-éléments pour calculer les DDLs internes au super-élément.

3 Exemple

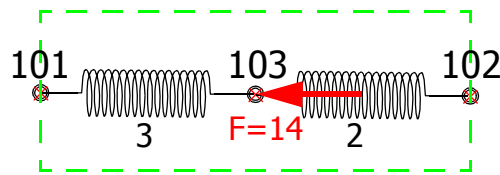
○ Envisageons l'exemple suivant. Chaque noeud i possède un seul DDL: u_i



Les 2 ressorts de raideur 3 et 2 vont constituer un super-élément.

Les noeuds 2 et 4 seront noeuds de liaison. Le noeud 3 sera noeud interne.

- **step 1** On considère le super-élément et on réalise une condensation.



- Partition du système:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \\ -3 & -2 & 3+2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_{101} \\ u_{102} \\ u_{103} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -14 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \{U_p\} &= \begin{bmatrix} u_{101} \\ u_{102} \end{bmatrix} & \{f_p\} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \{U_s\} &= \begin{bmatrix} u_{103} \end{bmatrix} & \{f_s\} &= \begin{bmatrix} -14 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

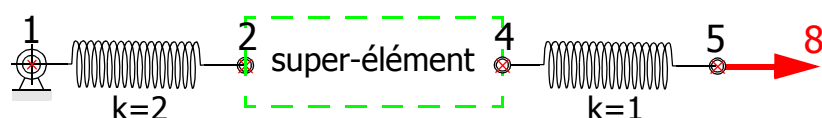
$$\begin{aligned} [K_{pp}] &= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} & [K_{ps}] &= \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix} \\ [K_{sp}] &= \begin{bmatrix} -3 & -2 \end{bmatrix} & [K_{ss}] &= \begin{bmatrix} 3+2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- Calcul de $[K]^*$ et $\{f\}^*$:

$$[K]^* = [[K_{pp}] - [K_{ps}] \cdot [K_{ss}]^{-1} \cdot [K_{sp}]] = \begin{bmatrix} 1.2 & -1.2 \\ -1.2 & 1.2 \end{bmatrix}$$

$$\{f\}^* = \{f_p\} - [K_{ps}] \cdot [K_{ss}]^{-1} \cdot \{f_s\} = \begin{bmatrix} -8.4 \\ -5.6 \end{bmatrix}$$

- **step 2** Assemblage global.



- Le noeud 2 correspond au noeud 101 et le noeud 4 au noeud 102.

L'assemblage conduit au système suivant:

$$\begin{bmatrix} & & & \\ & 2+1.2 & -1.2 & \\ & -1.2 & 1.2+1 & -1 \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_2 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8.4 \\ -5.6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

dont la solution est:

$$u_1 = 0 \quad / \quad u_2 = -3 \quad / \quad u_4 = -1 \quad / \quad u_5 = 7$$

Les DDLs de liaison sont calculés.

○ step 3 Calcul du DDL interne.

On revient dans le super-élément et on calcule U_3 :

$$\{U_3\} = [K_{ss}]^{-1} \cdot [\{f_s\} - [K_{sp}] \cdot \{U_p\}] = -5$$

Résolution de ce problème avec Nastran:

○ step 1 Création du super-élément.

fichier .bdf

```

SOL 101
CEND
$*****
TITLE= exemple 1 / STEP1
PARAM,EXTOUT,DMIGOP2
SPC=20
LOAD=30
$*****
BEGIN BULK
$      $      $      $      $      $      $      $
ASET1  1      101    102
$      $      $      $      $      $      $      $
GRID   101      1.    0.    0.
GRID   102      3.    0.    0.
GRID   103      2.    0.    0.
$      $      $      $      $      $      $      $
CELAS2 1      3.    101    1    103    1
CELAS2 2      2.    103    1    102    1
$      $      $      $      $      $      $      $
SPC1    20      23456  101    102    103
FORCE   30      103      14.   -1.    0.    0.
ENDDATA

```

Un fichier nommé '*fort.30*' est créé. Il contient $[K]^*$ et $\{f\}^*$.

○ **step 2** Calcul global.

fichier .bdf

ASSIGN INPUTT2='fort.30',UNIT=30

SOL 101

CEND

\$*****

TITLE= exemple 1 / STEP2

SUBCASE 1

SUPER=1

SUBCASE 2

DISP=ALL

SPC=20

LOAD=30

\$*****

BEGIN BULK

PARAM EXTUNIT 30

GRID	1		0.	0.	0.		
GRID	2		1.	0.	0.		
GRID	4		3.	0.	0.		
GRID	5		4.	0.	0.		
\$	\$	\$	\$	\$	\$	\$	\$
CELAS2	1	2.	1	1	2	1	
CELAS2	2	1.	4	1	5	1	
\$	\$	\$	\$	\$	\$	\$	\$
SPC1	20	123456	1				
FORCE	30	5		8.	1.	0.	0.

\$*****

SEBULK 1 EXTERNAL

BEGIN SUPER= 1

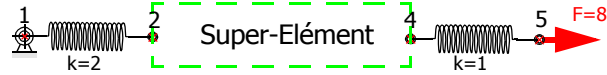
\$	\$	\$	\$	\$	\$	\$	\$
----	----	----	----	----	----	----	----

EXTRN 101 1 102 1

GRID	101	1.	0.	0.
GRID	102	3.	0.	0.

\$*****

ENDDATA



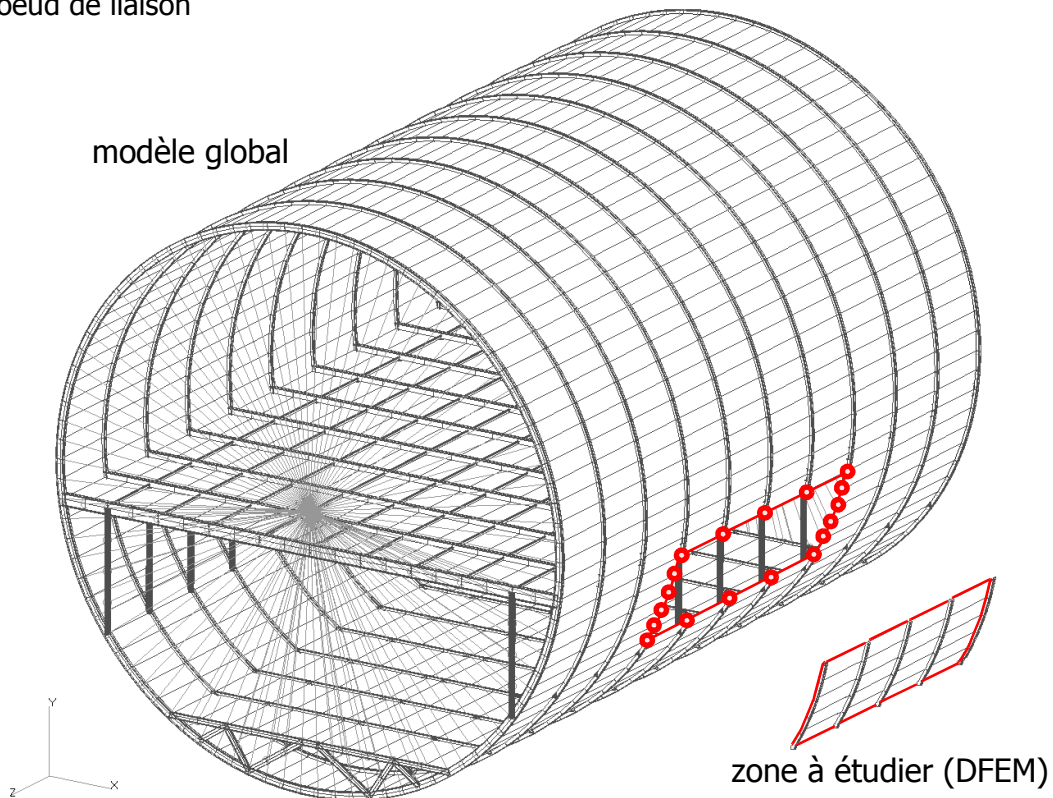
fichier .f06

D I S P L A C E M E N T V E C T O R								
POINT	ID.	TYPE	T1	T2	T3	R1	R2	R3
1		G	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2		G	-3.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
4		G	-1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
5		G	7.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

3 Analyse Globale/Locale GFEM/DFEM

○ Nous allons voir sur un exemple comment exploiter la condensation pour étudier une zone particulière du modèle (**Detailed Finite Element Model**) à partir des flux d'efforts obtenus sur le modèle global (**Global Finite Element Model**).

● Noeud de liaison



○ **step 1** La condensation est réalisée sur la zone GFEM en ne conservant que les noeuds de liaison.

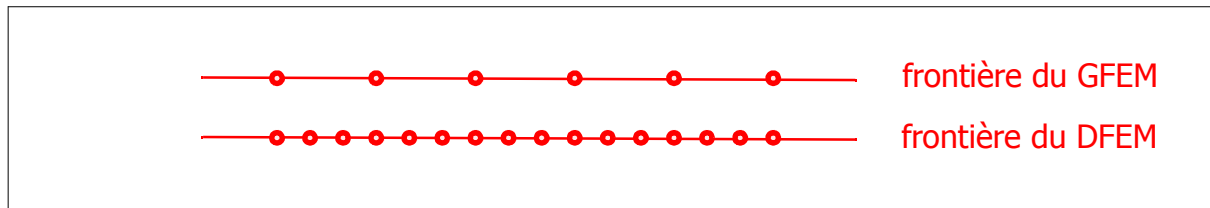
○ **step 2** Le calcul de la zone DFEM est lancé en récupérant $[K]^*$ et $\{f\}^*$

○ Si on conserve la même modélisation et la même densité de maillage dans le GFEM et le DFEM, on obtient le même résultat que si le modèle avait été traité sans condensation.

○ Mais l'intérêt est de modéliser le DFEM avec plus de précision que le GFEM:

- densité de maillage augmentée,
- raidisseurs modélisés plus précisément (en '*rods*' ou '*beams*' dans le GFEM, en '*shells*' dans le DFEM),
- modélisation des éléments de liaison et des fixations dans le DFEM,
- représentation éventuelle de dommages dans le DFEM,
- ...etc

Dans ce cas, il se peut qu'il n'y ait plus coïncidence des noeuds de frontière.



Les noeuds coïncidents sont alors liés par *RBE2 coupling*.
Les autres font l'objet d'une couture (*sewing*) par RBE3.

